Exploration de graphes anonymes avec des jumelles

Jérémie Chalopin, Emmanuel Godard, Antoine Naudin

Exploration de graphes anonymes avec des jumelles

Jérémie Chalopin, Emmanuel Godard and Antoine Naudin

LIF, Université Aix-Marseille and CNRS, FRANCE

Nous nous intéressons à l'exploration de graphes par un agent mobile. Il est connu que sans information "globale" sur le graphe, un agent peut explorer et s'arrêter uniquement si le graphe est un arbre. C'est pourquoi nous équipons l'agent de "jumelles" lui permettant de voir le graphe induit par les sommets voisins du sommet courant. Dans cette étude, nous montrons que cette information locale donnée par les jumelles permet à l'agent d'explorer avec arrêt une plus large famille de graphes que les arbres. Nous prouvons la condition nécessaire suivante : un graphe est explorable seulement si son complexe de clique admet un revêtement universel fini. Puis, nous proposons un algorithme d'exploration universel pour tout graphe satisfaisant cette condition, prouvant ainsi que cette famille, appelée $\mathcal{FC}$, est maximum pour l'exploration avec arrêt. Pour finir, nous montrons qu'il n'existe pas de fonction calculable pouvant borner la complexité de tout algorithme d'exploration de $\mathcal{FC}$.

Mots clés : Agent mobile, exploration de graphes, Graphes anonymes, Revêtement Universel, Simplement Connexe.

1 Introduction

1.1 Le Modèle

Nous utilisons le modèle standard d'agent mobile (voir [Das13]). Un agent mobile est une entité mobile naviguant dans un graphe $G = (V, E)$ de sommet en sommet via les arêtes. Chaque sommet $v \in V(G)$ dispose d'une étiquette $label(v)$. De plus, les graphes sont anonymes, c.à.d., l'étiquette $label(v)$ ne permet pas d'identifier formellement le sommet v de manière unique. Afin de permettre à l'agent de se déplacer dans le graphe, les sommets sont dotés d'un étiquetage des ports localement injectif $\delta = \{\delta_v\}_{v \in V(G)}$ donnant pour un sommet $v \in V(G)$, une identité unique à chacun de ses voisins. Soit $\delta_u(v)$, le numéro de port en u désignant l'arête uv. Afin de pouvoir "revenir sur ces pas", l'agent connaît le numéro de port par lequel il accède au sommet courant.

Nous notons (G, δ) un graphe G doté d'un étiquetage des ports δ. Pour avoir des algorithmes robustes aux différents étiquetages des ports pour un même graphe, nous notons $\mathcal{G}^\delta$ la famille contenant tous les graphes dotés d'un étiquetage des ports valide. Comme les numéros de ports sont invariant durant une exécution, nous noterons G pour désigner un graphe $(G, \delta) \in \mathcal{G}^\delta$. Un agent visitant un sommet du graphe peut utiliser des jumelles lui permettant de "voir" le graphe induit par les sommets adjacents au sommet visité ainsi que les numéros de ports présents dans ce graphe. Nous supposons que chaque sommet du graphe possède une étiquette encodant cette boule de rayon 1 autour du sommet. L'étiquette est disponible lorsque un agent visite le sommet. Comme seules ces contraintes sont spécifiques au modèle, nous pourrons ainsi réutiliser les techniques et algorithmes classiques sur des graphes étiquetés. Il est assez évident de voir que cet encodage par étiquettes est équivalent au modèle avec jumelles. En effet, les jumelles donnant juste une information locale, elles n'augmentent pas les possibilités de mouvements de l'agent. Nous appellerons cet étiquetage des sommets *étiquetage de jumelles*.

1.2 Exploration de graphes anonymes

Un algorithme $\mathcal{A}$ est un *algorithme d'Exploration* si pour toute exécution sur un graphe $G \in \mathcal{G}^\delta$ avec étiquetage de jumelles et pour tout sommet de départ $v_0 \in V(G)$, l'agent explore G et s'arrête, ou l'agent ne s'arrête jamais (exploration perpétuelle). Un graphe G est *explorable* s'il existe un algorithme d'Exploration qui, pour tout sommet de départ, explore G et s'arrête. Un algorithme $\mathcal{A}$ explore une famille de graphes $\mathcal{F}$ si $\mathcal{A}$ est un algorithme d'Exploration tel que pour tout $G \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ s'arrête et pour tout $G \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ explore G et s'arrête ou ne s'arrête jamais.

1.3 Nos Résultats

Nous nous intéressons à la calculabilité distribuée du modèle. Tout d'abord, en s'appuyant sur un lemme standard de relèvement [Ang80], nous donnons une condition nécessaire sur les graphes explorables avec jumelles. Une borne inférieure sur le nombre de déplacements requis par l'agent est aussi donnée.

Nous montrons ensuite que cette condition caractérise exactement la famille maximum des graphes explorables. Cette famille maximum, notée $\mathcal{FC}$, contient les graphes ayant un complexe de clique possédant un revêtement universel fini.

Un algorithme d'Exploration est ainsi proposé pour $\mathcal{FC}$. Comme $\mathcal{FC}$ est maximum, notre algorithme explore donc tous les graphes explorables. Notons que $\mathcal{FC}$ est bien plus vaste que les arbres ; elle contient entre autre tous les graphes ayant un complexe de clique simplement connexe (comme les graphes triangulés, les triangulations planaires ou encore les triangulations du plan projectif). Une version longue de ces résultats est présentée dans [CGN15].

2 Définitions et Notations

Graphes. Nous considérons des graphes sans boucle, ni arête multiple. Soit $p = (v_0, \ldots, v_k)$ un chemin dans un graphe G munis d'un étiquetage des ports δ. L'étiquetage induit par $p \subset G$, noté $\lambda(p) = \{\delta_{v_i}(v_{i+1}) \mid 1 \leq i < k\}$, est la séquence de numéros de ports suivi par p dans G. Nous notons par $B_G(v,k)$, le graphe induit par l'ensemble de sommets à distance au plus k de v. Nous supposons que l' étiquette $label(v)$ donné au sommet $v \in V(G)$ correspond à l'étiquetage de jumelles (vu plus haut), i.e., $label(v)$ encode un graphe isomorphe à $B_G(v,1)$ (préservant l'étiquetage des ports). Nous présentons maintenant les revêtements, outils indispensables de cette étude. Un morphisme $\varphi : V(G) \to V(H)$ de G dans H est un *homomorphisme* si pour toute arête $uv \in E(G)$, $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Un homomorphisme $\varphi : V(G) \to V(H)$ de G dans H est un *revêtement* si pour tout $v \in V(G)$, $\varphi|_{V(B_G(v,1))}$ est une bijection entre $B_G(v,1)$ et $B_H(\varphi(v),1)$. Ces définitions sont étendues aux graphes étiquetés $(G,\delta,label),(H,\delta',label')$ avec les conditions suivantes : $label(v) = label'(\varphi(v))$ et $\forall uv \in E(G), \delta_u(v) = \delta'_{\varphi(u)}(\varphi(v))$.

Complexes Simpliciaux. Les définitions suivantes sont standard [LS77]. Étant donné un ensemble V, un *simplexe* de dimension n est un sous-ensemble de V à $n+1$ éléments. Un *complexe simplicial* K est un ensemble de simplexes tel que pour tout simplexe $s \in K$, $s' \subseteq s$ implique que $s' \in K$. Un complexe simplicial est *connexe* si le graphe induit par les simplexes de dimension 0 (sommet) et 1 (arête) est connexe. Notons $St(v,K)$ le sous-complexe de K contenant tout simplexe s de K contenant v et les sous-complexes induit par le sommets contenus dans s. Un *homomorphisme simplicial* $\varphi : K \to K'$ de K dans K' est un morphisme tel que si $s = \{v_0, \ldots, v_k\} \in K$ est un simplexe, alors $\{\varphi(v_0), \ldots, \varphi(v_k)\}$ est aussi un simplexe dans K'. Pour finir, un homomorphisme simplicial $\varphi : K \to K'$ est un *revêtement simplicial* si pour tout sommet v de $V(K)$, $\varphi|_{St(v,K)}$ est une bijection entre $St(v,K)$ et $St(\varphi(v),K')$. Le *revêtement universel* d'un complexe K, noté $\hat{K}$, est un complexe (possiblement infini) tel que il existe un revêtement $\varphi : \hat{K} \to K$ et tel que pour tout complexe K' et revêtement $\varphi' : K' \to K$, il existe un revêtement $\varphi'' : \hat{K} \to K'$ et $\varphi' \circ \varphi'' = \varphi$. Le revêtement universel est unique à isomorphisme près. Le *complexe de clique* d'un graphe G, noté $\mathcal{K}(G)$, est le complexe simplicial formé par les cliques de G. La proposition suivante justifie l'utilisation des complexes de cliques.

Proposition 2.1. *Étant donné deux graphes G et H avec étiquetage de jumelles et un morphisme $\varphi : V(G) \to V(H)$, φ est un revêtement (préservant les étiquettes) si et seulement si φ est un revêtement simplicial de $\mathcal{K}(G)$ dans $\mathcal{K}(H)$.*

Nous noterons G pour définir soit un graphe avec étiquetage de jumelles, soit son complexe de cliques. Deux chemins p,p' dans un graphe G sont dit *élémentairement homotope* si ils vérifient une des deux conditions suivantes,

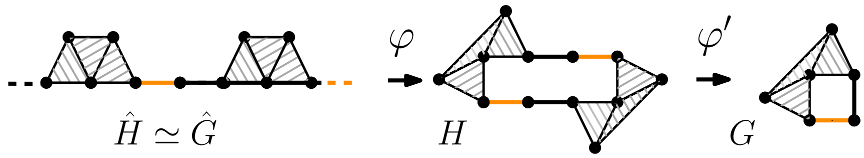

Figure 1: Exemples de revêtements simpliciaux.

(i) p' peut être obtenu de p en insérant ou supprimant un sous-chemin (uvu) avec $u, v \in V(G)$.

(ii) p et p' sont de la forme suivante : $p = (v_0 \dots v_i q v_j \dots v_k)$ et $p' = (v_0 \dots v_i q' v_j \dots v_k)$ où q et q' sont deux sous-chemins et $q^{-1}q'$ est un triangle dans G (q ou q' peuvent être vides).

Un cycle c dans un graphe G est k-*contractible* s'il existe une séquence de k cycles $\{c_1 \dots c_k\}$ tel que $c_1 = c$, $c_k = \{u\}$ avec $u \in V(G)$ et pour tout $1 \leq i < k$, c_i et c_{i+1} sont élémentairement homotopes. Un cycle est *contractible* s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que c est k-contractible. Un complexe simplicial est *simplement connexe* si tous ses cycles sont contractibles. Ces complexes possèdent des propriétés combinatoires et topologiques intéressantes, mises en avant dans la proposition suivante.

Proposition 2.2. *[LS77] Soit K' et K deux complexes, et un revêtement $\varphi : K' \to K$. K' est le revêtement universel de K si et seulement si K' est simplement connexe.*

Nous montrerons par la suite qu'un agent ne peut distinguer entre deux graphes (avec étiquetages de jumelles) si il existe un revêtement de l'un vers l'autre (Lemme 3.1).

3 Résultat d'Impossibilité et Borne Inférieure

Dans le modèle classique, la seule famille maximale de graphes explorables est celles des arbres. Nous adaptons donc cette classification aux graphes avec étiquetage de jumelles. Notons $\mathcal{FC} = \{G \mid$ le revêtement universel de $\mathcal{K}(G)$ est fini$\}$ et $\mathcal{IC} = \{G \mid$ le revêtement universel de $\mathcal{K}(G)$ est infini$\}$. Remarquons que $\mathcal{FC}$ possède une importante sous classe $\mathcal{SC} = \{G \mid \mathcal{K}(G)$ est simplement connexe$\}$. Les complexes représentés sur l'exemple de la Figure 1 appartiennent à $\mathcal{IC}$. Il y a deux revêtements simpliciaux représentés : φ, qui montre un revêtement depuis le revêtement universel (infini, à gauche) ; et φ' montrant que la taille d'un revêtement (au centre) est toujours un multiple de la taille du complexe revêtu (à droite), ici le double. Étant donné un graphe G et un algorithme d'Exploration $\mathcal{A}$, nous noterons (Λ_G^i, pos_G^i) l'état de l'agent à l'étape $i \in \mathbb{N}$ de l'exécution où Λ_G^i est la mémoire de l'agent et pos_G^i est sa position courante dans $V(G)$. Le preuve du lemme suivant est standard (voir [YK96]).

Lemme 3.1 (Lemme de relèvement)**.** *Soit $\mathcal{A}$ un algorithme d'Exploration, G, H deux graphes avec étiquetage de jumelles et un revêtement $\varphi : G \to H$. Pour tout sommet de départ $u \in V(G)$ et $v \in V(H)$ tel que $\varphi(u) = v$, les exécutions de $\mathcal{A}$ dans G et H vérifient que $\forall i \in \mathbb{N}$, $(\Lambda_G^i, pos_G^i) = (\Lambda_H^i, pos_H^i)$.*

Soit deux graphes G et H tels que durant les k premières étapes d'une exécution, un agent ne peut pas faire de distinction entre G et H (il suivra donc une même séquence de ports sur ses k premiers déplacements). Il s'arrêtera donc dans G en moins de k déplacements si et seulement s'il s'arrête dans H en moins de k déplacements. Donc, si $|V(G)| > k+1$ et que l'agent explore H en moins de k étapes, l'agent ne pourra pas explorer G avec le même algorithme. Par conséquent, un agent explorant un graphe $G \in \mathcal{FC}$ devra donc se déplacer au moins $|V(\hat{G})|$ fois pour être certain de ne pas s'arrêter trop tôt dans le revêtement universel $\hat{G}$ du complexe G et ainsi respecter la spécification. La taille du revêtement universel est donc une borne inférieure pour l'Exploration d'un graphe $G \in \mathcal{FC}$. De plus, pour tout graphe $G \in \mathcal{IC}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un graphe H tel qu'un agent ne peut pas distinguer G de H en moins de k étapes. Par conséquent, aucun graphe $G \in \mathcal{IC}$ n'est explorable. Nous obtenons le théorème suivant,

Théorème 1. *Si un graphe G est explorable par un algorithme $\mathcal{A}$ alors $G \in \mathcal{FC}$. De plus, le nombre de mouvements de l'agent sera supérieur à la taille du revêtement universel de G.*

Algorithm 1: Exploration de $\mathcal{FC}$

begin
  $k = 0$;
  repeat
    Incrémenter k ;
    Explorer à distance $2k$ et calculer $\mathcal{T}(v_0, 2k)$;
    Chercher un graphe H tel que $|V(H)| < k$, $\exists \tilde{v}_0 \in V(H)$ et $\tilde{v}_0 \sim_{2k} v_0$;
  until *H existe et tous ses cycles simples sont k-contractible*;
  Arrêter l'exploration;

4 Exploration de $\mathcal{FC}$

Nous proposons un algorithme d'Exploration pour la famille $\mathcal{FC}$. Le but de l'algorithme est de visiter une boule suffisamment grande avant de stopper l'agent. Pour détecter quand arrêter l'agent, nous utilisons les *vues* des sommets [YK96], de façon standard. La *vue* d'un sommet v à distance k dans un graphe G, noté $\mathcal{T}(v,k)$, contient tous les chemins possibles (avec tous les étiquetages associés) de longueur au plus k issus de v dans G. Nous notons $v \sim_k v'$ si $\mathcal{T}(v,k) = \mathcal{T}(v',k)$. Pour prouver la correction de cet algorithme sur un graphe $G \in \mathcal{FC}$, nous prouvons que le graphe H trouvé par l'algorithme est le revêtement universel de G. Comme $|V(G)| \leq |V(\hat{G})|$, G est bien inclus dans la boule explorée par l'agent. Notons que tester la k-contractibilité des cycles simples est calculable et prouve la simple connexité si le test réussit. Pour prouver le théorème, nous montrons qu'un complexe simplement connexe ne ressemble localement à aucune sous-partie *stricte* d'un autre complexe. Pour cela, nous montrons que pour tous chemins p, q partant de $\tilde{v}_0$ et menant à un même sommet $\tilde{v}$ de H, les deux chemins de G partant de v_0 et étiquetés $\lambda(p)$ et $\lambda(q)$ mènent à un même sommet v de G tel que $label(\tilde{v}) = label(v)$. Ainsi, Nous pouvons définir un homomorphisme $\varphi : H \to G$ comme suit. Pour tout sommet $\tilde{v} \in V(H)$, on choisit un chemin $\tilde{p}$ allant de $\tilde{v}_0$ à $\tilde{v}$ dans H. L'image de $\tilde{v}$, $\varphi(\tilde{v})$, est le sommet v atteint par le chemin étiqueté $\lambda(\tilde{p})$ depuis v_0 dans G. Nous montrons ensuite que φ est un revêtement. Comme $\mathcal{FC}$ est explorable (Correction $Algorithme1$) et que par le Théorème 1, $\mathcal{IC}$ ne l'est pas, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2. *$\mathcal{FC}$ est maximum pour l'exploration de graphes avec étiquetage de jumelles.*

Pour finir, nous montrons un résultat de complexité pour tout algorithme d'Exploration de $\mathcal{FC}$.

Théorème 3. *Pour tout algorithme d'Exploration $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{FC}$, il n'existe pas de fonction calculable $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que pour tout graphe $G \in \mathcal{FC}$, $\mathcal{A}$ exécute au plus $\tau(|V(G)|)$ mouvements avant arrêt.*

Pour prouver ce théorème, nous procédons par l'absurde en proposant une procédure reposant sur cette fonction τ (supposée calculable) et simulant l'algorithme $\mathcal{A}$ pendant $\tau(|G|)$ étapes. Cette procédure permet ainsi de décider si un complexe simplicial est simplement connexe ou non. Ce problème étant indécidable [Hak73], nous obtenons donc le résultat.

Références

[Ang80] D. Angluin. Local and global properties in networks of processors. *Proceedings of the 12th Symposium on Theory of Computing*, pages 82–93, 1980.

[CGN15] Jérémie Chalopin, Emmanuel Godard, and Antoine Naudin. Anonymous graph exploration with binoculars. Technical report, LIF, Université Aix-Marseille and CNRS, May 2015. arXiv : 1505.00599.

[Das13] S. Das. Mobile agents in distributed computing : Network exploration. *Bulletin of EATCS*, 1(109), 2013.

[Hak73] W. Haken. Connections between topological and group theoretical decision problems. In *Word Problems Decision Problems and the Burnside Problem in Group Theory*, volume 71 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 427–441. North-Holland, 1973.

[LS77] R.C. Lyndon and P.E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1977.

[YK96] M. Yamashita and T. Kameda. Computing on anonymous networks : Part i - characterizing the solvable cases. *IEEE TPDS*, 7(1) :69–89, 1996.